第 18 講　確率と数列

18　次の各問いに答えよ．

(1)　赤玉 2 球，白玉 8 球が入った袋がある．この袋から玉を同時に 2 球取り出し，赤玉は手元に置き，白玉は袋に返すという試行を繰り返す．n 回の試行の後，袋に赤玉が 2 球残っている確率を p_n，1 球残っている確率を q_n とする．

(i)　p_1，q_1 を求めよ．

(ii)　q_2 を求めよ．

(iii)　p_n，q_n を p_{n-1}，q_{n-1} を用いて表せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(2)　ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面（底面）の 4 辺のうち 1 辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回（n は自然数）続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく．

(i)　a_2 を求めよ．

(ii)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け．

(iii)　b_n を n の式で表せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　確率と数列

18　座標平面上に4点A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1)を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x軸と平行な方向の移動について確率p，y軸と平行な方向の移動について確率$1-p$で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n秒後に頂点Aにいる確率をa_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$とする．a_{2n}を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1-(2p-1)^{2n}\}$　　㋑　$a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n}\}$

㋒　$a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n-1}\}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　確率と数列

18　次の各問いに答えよ．

(1)　赤玉2球，白玉8球が入った袋がある．この袋から玉を同時に2球取り出し，赤玉は手元に置き，白玉は袋に返すという試行を繰り返す．n 回の試行の後，袋に赤玉が2球残っている確率を p_n，1球残っている確率を q_n とする．

(i)　p_1，q_1 を求めよ．

(ii)　q_2 を求めよ．

(iii)　p_n，q_n を p_{n-1}，q_{n-1} を用いて表せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(2)　ある1面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面（底面）の4辺のうち1辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回（n は自然数）続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく．

(i)　a_2 を求めよ．

(ii)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け．

(iii)　b_n を n の式で表せ．

【答】 (1)(i) $p_1=\dfrac{28}{45}$，$q_1=\dfrac{16}{45}$　(ii) $q_2=\dfrac{112}{225}$　(iii) $p_n=\dfrac{28}{45}p_{n-1}$，$q_n=\dfrac{16}{45}p_{n-1}+\dfrac{7}{9}q_{n-1}$

(2)(i) $a_2=\dfrac{1}{2}$　(ii) $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+1$　(iii) $b_n=\dfrac{1}{6}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

【解答】

(1)　(i)　$p_1=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\mathbf{\dfrac{28}{45}}$，$q_1=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\mathbf{\dfrac{16}{45}}$

(ii)　1回目の試行後に赤玉が2球残っている状態から赤1つと白1つを取り出す場合と，1回目の試行後に赤玉が1つ残っている状態から白2つを取り出す場合を考えればよいので

$$q_2=p_1\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}+q_1\times\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{28}{45}\times\frac{16}{45}+\frac{16}{45}\times\frac{7}{9}=\mathbf{\frac{112}{225}}$$

(iii)　n 回目の試行後に赤玉が2球残っているのは $n-1$ 回目に赤玉が2球残っている状態から白2つ取り出す場合しかないので

$$p_n=p_{n-1}\times\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{p_n=\frac{28}{45}p_{n-1}}$$

n 回目に赤玉が1球残っているのは(ii)と同様に考えて

$$\boldsymbol{q_n=\frac{16}{45}p_{n-1}+\frac{7}{9}q_{n-1}}$$

(2)　(i)　1回目には印のついた面が側面にくるので $a_1=1$

印のついた面が側面にあるとき，印のついた側面と底面の共有する辺と隣り合う辺を

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

選んだ場合のみ次に印のついた面が側面にくるので

$$a_2=a_1\times\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(ii)　n 回目の操作の後に印が上面にくる確率は $1-a_n-b_n$ である.

　このとき，$n+1$ 回目の操作の後に印のついた面が側面にくるのは，n 回目の操作の後に印のついた面が上面にある場合はどの辺を選んでも次に印のついた面が側面にきて，n 回目の操作の後に印のついた面が側面にある場合は(i)と同様に考え，n 回目の操作の後に印のついた面が底面にある場合はどの辺を選んでも次に印のついた面が側面にくるので

$$a_{n+1}=(1-a_n-b_n)\times1+a_n\times\frac{2}{4}+b_n\times1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1}$$

(iii)　$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$ を変形して

$$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\quad a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

また，n 回目の操作の後に印のついた面が底面にあるには，$n-1$ 回目の操作の後に印のついた面が側面にあり，印のついた側面と底面の共有する辺を選ぶ場合であるので，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

であるが，これは $n=1$ のときにも成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 18 講　確率と数列

18 座標平面上に 4 点 A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点 Q は，x 軸と平行な方向の移動について確率 p, y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，n 秒後に頂点 A にいる確率を a_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ とする．a_{2n} を求めよ．

【選択肢】

㋐ $a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1-(2p-1)^{2n}\}$　　㋑ $a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n}\}$

㋒ $a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n-1}\}$

【答】 ㋑

【解答】

(1) n 秒後に Q が B, C, D にいる確率をそれぞれ b_n, c_n, d_n とすると

$$a_1=c_1=0,\quad b_1=1-p,\quad d_1=p$$

である．

よって 2 秒後に A, C にいる確率は

$$\begin{aligned}a_2&=(1-p)b_1+pd_1\\&=(1-p)^2+p^2\\&=2p^2-2p+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_2&=pb_1+(1-p)d_1\\&=p(1-p)+(1-p)p\\&=-2p^2+2p\end{aligned}$$

また 4 秒後に A にいる確率は

2 秒後に A にいるときには

A → D → A

A → B → A

2 秒後に C にいるときには

C → D → A

C → B → A

の各場合を考えて

$$\begin{aligned}a_4&=\{p^2+(1-p)^2\}a_2+\{(1-p)p+p(1-p)\}c_2\\&=(2p^2-2p+1)a_2+(-2p^2+2p)c_2\quad\cdots\cdots(*)\\&=(2p^2-2p+1)(2p^2-2p+1)+(-2p^2+2p)(-2p^2+2p)\\&=8p^4-16p^3+12p^2-4p+1\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$c_4 = 1 - a_4$

$= -8p^4 + 16p^3 - 12p^2 + 4p$

（＊）より帰納的に $a_{2(n+1)} = (2p^2 - 2p + 1)a_{2n} + (-2p^2 + 2p)(1 - a_{2n})$ すなわち

$$a_{2(n+1)} = (4p^2 - 4p + 1)a_{2n} + (-2p^2 + 2p)$$

を得るので，これを変形すると

$$a_{2(n+1)} - \frac{1}{2} = (2p-1)^2\left(a_{2n} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad a_{2n} - \frac{1}{2} = \left(a_0 - \frac{1}{2}\right)\cdot(2p-1)^{2n}$$

$a_0 = 1$ より

$$\boldsymbol{a_{2n} = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^{2n}\}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。